

## ¿Datos potenciales zurdos o diestros?

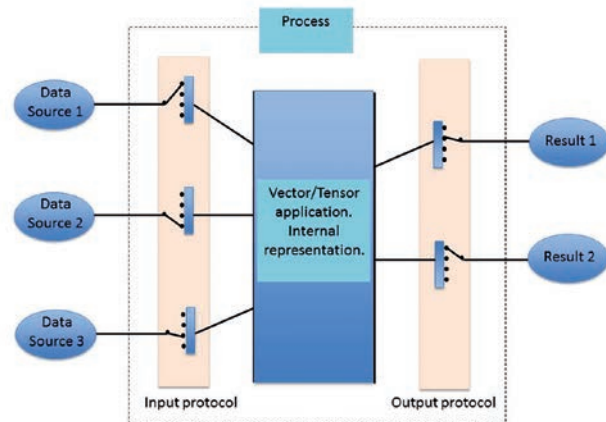
Horst Holstein<sup>1\*</sup>, Des FitzGerald<sup>2</sup>, Matt Zengerer<sup>2</sup> y Andy Starr<sup>1</sup> ponen de relieve la naturaleza de la ambigüedad y sugieren un método unificado para abarcar cualquier combinación de convenciones de coordenadas.

La representación de los campos de vectores y tensores potenciales mediante matrices  $3 \times 1$  y  $3 \times 3$  de componentes cartesianas es ambigua, a no ser que las direcciones de las coordenadas también se especifiquen y, en particular, si el sistema es zurdo o diestro. En este artículo ponemos de relieve la naturaleza de la ambigüedad y sugerimos un método unificado para abarcar cualquier combinación de convenciones de coordenadas. El incumplimiento de las convenciones correctas puede conducir a una interpretación incorrecta de los datos potenciales y los protocolos sugeridos son un paso hacia la integridad de los datos.

Los tensores de rango uno y rango dos, normalmente denominados vectores y tensores en los contextos geofísicos, a menudo se registran como conjuntos de datos de matrices  $3 \times 1$  y  $3 \times 3$  de componentes numéricas cartesianas. Sin embargo, las proyecciones de diferentes orígenes pueden utilizar diferentes convenciones de coordenadas, o el cliente puede desconocer las convenciones de coordenadas que asume el proveedor.

En esencia, los datos de las matrices de vectores y tensores son incompletos si no están también acompañados de información que indique las direcciones y el orden de los ejes del sistema de coordenadas empleado. Un sistema comúnmente utilizado hace uso de las direcciones de coordenadas Norte (N), Este (E) y Abajo (D, por sus siglas en inglés). Pero, ¿el orden de las componentes de los vectores es *END* o *NED*? El primero es para un sistema de coordenadas zurdo y el segundo para uno diestro. La elección afectará al significado de los datos de las componentes de los vectores y los tensores. Además, el software estándar de operaciones vectoriales (en particular, las rutinas de producto vectorial) asume sistemas de referencia diestros y pueden producir resultados incorrectos para sistemas zurdos a no ser que se ajusten explícitamente.

Para garantizar un manejo coherente de los datos potenciales por diversos programas de aplicación, sugerimos un protocolo inicial durante el cual se pida al usuario que indique las convenciones de coordenadas a utilizar para una fuente de datos, antes de que se realice ningún procesamiento de los datos (ver Figura 1). Esto compromete al usuario a una convención específica, en lugar de permitir que el procesamiento se realice bajo las suposiciones por defecto. Tras esta



**Figura 1** Diagrama esquemático para el mantenimiento del manejo de vectores y tensores sugerido. A las fuentes de datos de vectores y tensores externas, al ser consultadas, se les asignan métodos adecuados de conversión en un formato interno antes del procesamiento. Esto garantiza que los datos que utilicen diferentes convenciones de referencias sean manejados de forma coherente. Los resultados se exportan a través de un protocolo de salida mediante métodos que convierten el formato interno en un formato externo adecuado.

etapa, cualquier dato de vectores o tensores de dicha fuente se convierte a un sistema estándar diestro para el trabajo interno. Un protocolo de salida revierte lo interno de nuevo a las convenciones de un formato de datos externo. Esto garantizará un tratamiento coherente del procesamiento de los vectores y los tensores. El usuario no necesita estar informado sobre la convención interna, ya que las interfaces de los datos se realizan a través de los protocolos indicados por el usuario.

En las próximas secciones, primero ofrecemos una derivación intuitiva de los resultados estándar de las transformaciones de vectores y tensores para el caso de tres convenciones de coordenadas cartesianas comunes. Esto nos permitirá demostrar las transformaciones directa e inversa entre los sistemas de referencia estándar externo e interno. A continuación, ampliamos nuestras derivaciones para incluir la fórmula de transformación habitual basada en matrices y mostraremos cómo se pueden incluir en los protocolos. En la discusión y las conclusiones, enumeramos algunos escenarios en los que los protocolos de las coordenadas de los datos son importantes y consideramos los posibles costes operativos de los protocolos sugeridos.

<sup>1</sup> Universidad de Aberystwyth.

<sup>2</sup> Intrepid Geophysics.

\* Correo electrónico del autor de contacto: hoh@aber.ac.uk

# EM y Métodos Potenciales

## Representación cartesiana de vectores y tensores

Dada una función potencial  $\phi(x_1, x_2, x_3)$  definida en los puntos  $(x_1, x_2, x_3)$  de un sistema de coordenadas cartesianas, las componentes del campo de vectores  $\mathbf{F}$  y el campo de tensores  $\mathbf{G}$  asociados se pueden escribir en forma de matriz como

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{bmatrix} \quad (1)$$

donde

$$\varphi_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2)$$

La condición habitual de las derivadas segundas continuas garantiza que las componentes de los tensores  $\varphi_{ij}$  definidas en la ecuación (2) formen una representación de matriz simétrica para  $\mathbf{G}$  en la ecuación (1).

Aunque la notación de la ecuación (1) refleja el uso común, es imprecisa, ya que no hace hincapié en las direcciones de los ejes de coordenadas utilizados. Una matriz de componentes sólo puede representar un vector o tensor si los vectores base del sistema de referencia también se indican o están implícitos. A continuación, ofrecemos dichas indicaciones a través de matrices con sufijos.

Permitamos que  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  sean tres vectores unidad ortogonales dirigidos a lo largo de los ejes del sistema de coordenadas utilizado. En comparación con la ecuación (1), se proporciona una definición más explícita de vectores y tensores a través de la notación

$$\mathbf{F} = \varphi_1 \mathbf{x}_1 + \varphi_2 \mathbf{x}_2 + \varphi_3 \mathbf{x}_3, \quad (3)$$

$$\mathbf{G} = \begin{aligned} &\varphi_{11} \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1 + \varphi_{12} \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 + \varphi_{13} \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_3 \\ &+ \varphi_{21} \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_1 + \varphi_{22} \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_2 + \varphi_{23} \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3 \\ &+ \varphi_{31} \mathbf{x}_3 \mathbf{x}_1 + \varphi_{32} \mathbf{x}_3 \mathbf{x}_2 + \varphi_{33} \mathbf{x}_3 \mathbf{x}_3 \end{aligned} \quad (4)$$

La ecuación (3) expresa simplemente el vector  $\mathbf{F}$  como una suma de vectores unidad ponderados por sus componentes vectoriales en la ecuación (1), mientras que la ecuación (2) expresa el tensor  $\mathbf{G}$  como una suma ponderado de los tensores elementales formados a partir de los pares ordenados  $(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j)$ . Esos pares ordenados se consideran como los marcadores de posición de las componentes en el esquema de la matriz de la ecuación (1). Dichas "díadas" se abordan en Pujo (2003) y Weatherburn (1960).

Al contrario que la ecuación (1), las ecuaciones (3) y (4) muestran la dependencia explícita a los vectores (o vectores base)  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  del eje de coordenadas. Su presencia explícita permite derivar cualquier componente en cualquier sistema de referencia. Por ejemplo, las componentes  $F_p, G_{pq}$  a lo largo de las direcciones unitarias arbitrarias  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  vienen dadas a través de las ecuaciones (3) y (4) mediante

$$F_p = \mathbf{p} \cdot \mathbf{F} = \varphi_1 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_1) + \varphi_2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_2) + \varphi_3 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_3), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} G_{pq} &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{q} \\ &= \mathbf{p} \cdot (\varphi_{11} \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1 + \varphi_{12} \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 + \dots) \cdot \mathbf{q} \\ &= \varphi_{11} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_1) (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{q}) + \varphi_{12} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_1) (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{q}) + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

La ortonormalidad de los vectores base unitarios, es decir

$$\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad i, j \in 1, 2, 3, \quad (7)$$

conduce a los resultados de componentes esperados en la base de residencia. Por ejemplo, con  $\mathbf{p} = \mathbf{x}_1, \mathbf{q} = \mathbf{x}_2$ , las ecuaciones (5) y (6) dan  $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{F} = \varphi_1$  y  $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{x}_2 = \varphi_{12}$ , respectivamente.

A continuación, utilizamos la representación base de vectores y tensores para explorar las relaciones entre tres sistemas de coordenadas utilizados comúnmente.

## Comparación de las representaciones en los sistemas NED, END y ENU

Considere tres sistemas de coordenadas comúnmente utilizados, con direcciones base enumeradas como a) *NED*, b) *END* y c) *ENU*. Permitamos que los vectores unidad a lo largo de los ejes de esos tres sistemas se indiquen como  $\mathbf{N}, \mathbf{E}, \mathbf{D}$  y  $\mathbf{U}$ . Dado que los vectores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{U}$  están dirigidos opuestamente, tenemos que  $\mathbf{D} = -\mathbf{U}$ .

Permitamos que las componentes de un vector  $\mathbf{F}$  a lo largo de las direcciones de los vectores unidad  $\mathbf{N}, \mathbf{E}, \mathbf{D}$  y  $\mathbf{U}$  se indiquen mediante

$$\varphi_1 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{F}, \varphi_2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}, \varphi_3 = \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}, -\varphi_3 = \mathbf{U} \cdot \mathbf{F} \quad (8)$$

Las expresiones para el mismo vector  $\mathbf{F}$  en los tres sistemas vienen dadas por

$$\mathbf{F} = \varphi_1 \mathbf{N} + \varphi_2 \mathbf{E} + \varphi_3 \mathbf{D} \quad (\text{NED, END}) \quad (9)$$

$$= \varphi_2 \mathbf{E} + \varphi_1 \mathbf{N} + (-\varphi_3) \mathbf{U} \quad (\text{ENU}) \quad (10)$$

La ecuación (9) se mantiene para los sistemas *NED* y *END*. En ausencia de indicaciones explícitas base, la notación estándar indica los vectores base implicados a través del orden de entradas en las matrices de componentes, así

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}_{\text{NED}} = \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}_{\text{END}} = \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_1 \\ -\varphi_3 \end{bmatrix}_{\text{ENU}} \quad (11)$$

Cuando hay que procesar una prospección con múltiples convenciones de datos de origen, y los vectores están representados como matrices de componentes, existe un margen de error al asumir convenciones no indicadas de ordenación base. Por otro lado, las formas (9) y (10) asignan las com-

# EM y Métodos Potenciales

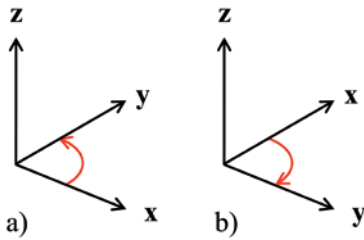


Figura 2 Se muestran dos sistemas de referencia con vectores unidad en los ejes. Siguiendo la regla de la mano derecha para los productos vectoriales, como indican las líneas de las flechas curvadas, los vectores de los ejes satisfacen a)  $X \times Y = Z$  y b)  $X \times Y = -Z$ . Esto hace que el sistema a) sea diestro y el sistema b) sea zurdo.

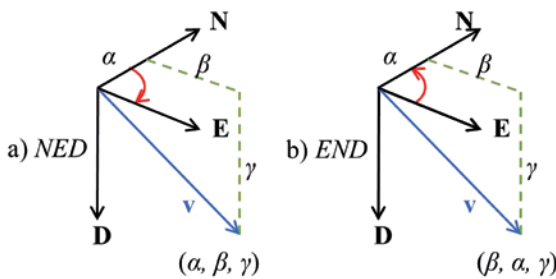


Figura 3 Dos sistemas de referencia, utilizando el mismo conjunto de vectores unidad en los ejes, pero enumerados como a)  $N, E, D$  y b)  $E, N, D$ . Las propiedades  $N \times E = D$ ,  $E \times N = -D$  indican que el sistema a) es diestro y el sistema b) es zurdo. En ambos sistemas, el vector desplazamiento  $\alpha N + \beta E + \gamma D$  denota el mismo vector posición  $v$ , pero sus componentes se registran como  $[\alpha, \beta, \gamma]$  y  $[\beta, \alpha, \gamma]$  en los sistemas a) y b), respectivamente.

ponentes a sus vectores base visibles y hacen hincapié en las suposiciones realizadas.

Se debe tener un cuidado especial cuando se emplea la operación del producto vectorial ( $\times$ ). Los mismos operandos numéricos pueden producir diferentes resultados numéricos, como ilustra

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$NED, ENU$  (right-handed)       $END$  (left-handed)

El significado del primer producto en el sistema  $NED$  es  $N \times E = D$ , y en el sistema  $ENU$  su significado es  $E \times N = U$ , mientras que el significado del segundo producto en el sistema  $END$  es  $E \times N = -D$ , todo lo cual es correcto. La aparente discrepancia del resultado numérico es consecuencia de la ordenación implícita de las componentes vectoriales.

Se dice que los sistemas  $NED$  y  $ENU$  son “diestros”, siendo su marca distintiva que el producto vectorial de dos vectores base cualquiera en una secuencia cíclica de izquierda a derecha produce el tercero. Así, para el sistema  $NED$ , tenemos  $N \times E = D$ ,  $E \times D = N$ ,  $D \times N = E$ , y para el sistema  $ENU$  tenemos  $E \times N = U$ , y sus permutaciones cíclicas. En el caso del sistema  $END$ , tenemos:  $E \times N = -D$ ,  $N \times D = -E$ ,  $D \times E = -N$  (ver Figuras 2 y 3). La inversión de signo

sistemática es una propiedad de los sistemas zurdos. Las rutinas vectoriales estándar asumen un sistema de referencia diestro. La Ecuación (12) muestra que el resultado estándar se puede ajustar cuando se realizan operaciones de productos vectoriales en sistemas zurdos.

Para un tensor  $G$  con componentes en el sistema  $NED$ , escribimos

$$G = \varphi_{11} NN + \varphi_{12} NE + \varphi_{13} ND + \varphi_{21} EN + \varphi_{22} EE + \varphi_{23} ED + \varphi_{31} DN + \varphi_{32} DE + \varphi_{33} DD \quad (13)$$

Reorganizamos de manera trivial los términos sumados para reflejar las ordenaciones que se utilizarían para el mismo tensor expresado en el sistema  $END$ ,

$$G = \varphi_{22} EE + \varphi_{21} EN + \varphi_{23} ED + \varphi_{12} NE + \varphi_{11} NN + \varphi_{13} ND + \varphi_{32} DE + \varphi_{31} DN + \varphi_{33} DD \quad (14)$$

y con  $U = -D$  en el sistema  $ENU$ ,

$$G = \varphi_{22} EE + \varphi_{21} EN - \varphi_{23} EU + \varphi_{12} NE + \varphi_{11} NN - \varphi_{13} NU - \varphi_{32} UE - \varphi_{31} UN + \varphi_{33} UU \quad (15)$$

A partir de esas reorganizaciones, obtenemos las representaciones implícitas equivalentes del tensor  $G$ ,

$$G = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{bmatrix}_{NED} = \begin{bmatrix} \varphi_{22} & \varphi_{21} & \varphi_{23} \\ \varphi_{12} & \varphi_{11} & \varphi_{13} \\ \varphi_{32} & \varphi_{31} & \varphi_{33} \end{bmatrix}_{END} = \begin{bmatrix} \varphi_{22} & \varphi_{21} & -\varphi_{23} \\ \varphi_{12} & \varphi_{11} & -\varphi_{13} \\ -\varphi_{32} & -\varphi_{31} & \varphi_{33} \end{bmatrix}_{ENU} \quad (16)$$

Una vez más, es evidente que las operaciones de tensores (p.ej., la diferenciación) se equipararán a las operaciones correspondientes de la matriz sólo si los operandos de la matriz expresan los tensores en el mismo sistema de referencia. En la siguiente sección sugerimos un método para conseguir tal integridad referencial.

### Conseguir una representación interna coherente

Para conseguir un procesamiento coherente de vectores y tensores, cualesquiera que sean las convenciones de los datos de origen, proponemos utilizar un sistema de coordenadas diestro definido internamente en el cual se cartografían todos los datos de origen. La representación ocurrirá durante la inicialización explícita, requiriendo que el usuario indique las convenciones del sistema de coordenadas de cada fuente externa de datos. Cualquier resultado o canal de visualización activará la transformación inversa para convertir la representación interna en la escogida por el usuario para el

# EM y Métodos Potenciales

canal de salida. El usuario no necesita estar informado de la representación interna específica – los resultado siempre se visualizan o producen en la convención elegida por el usuario.

Con este propósito, permítanos definir un sistema de referencia interno diestro con vectores unidad  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  con una representación interna de matrices columna

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Sabiendo que el  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  es un conjunto de vectores diestro, podemos realizar la distribución

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_1, \mathbf{N} = \mathbf{e}_2, \mathbf{D} = -\mathbf{e}_3, \mathbf{U} = \mathbf{e}_3. \quad (18)$$

Los vectores externos de entrada, expresados como triples coordenadas en convenciones posiblemente mezcladas, como

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}_{NED}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix}_{END}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}_{ENU}, \quad (19)$$

se redefinirán durante el protocolo de entrada según las adiciones vectoriales

$$\mathbf{a} = (2)\mathbf{N} + (-4)\mathbf{E} + (-1)\mathbf{D}, \quad (20)$$

$$\mathbf{b} = (1)\mathbf{E} + (-3)\mathbf{N} + (10)\mathbf{D}, \quad (21)$$

$$\mathbf{c} = (2)\mathbf{E} + (0)\mathbf{N} + (5)\mathbf{U}. \quad (22)$$

y bajo las relaciones (17) y (18) dan lugar a representaciones de matrices internas (aquí con el sufijo int)

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{int}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -10 \end{bmatrix}_{int}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}_{int} \quad (23)$$

Éstas permiten que las operaciones vectoriales normales se ejecuten correctamente, por ejemplo

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix}_{int}, \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \det \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -10 & 5 \end{bmatrix}_{int} = 16. \quad (24)$$

Para producir el primer resultado en la convención *NED*, por ejemplo, calculamos

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \\ \mathbf{E} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \\ \mathbf{D} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \end{bmatrix}_{NED} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -11 \end{bmatrix}_{NED}. \quad (25)$$

El resultado para  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ , siendo escalar, es un sistema de coordenadas invariante. La conversión de los tensores  $\mathbf{a}$  y desde el formato interno se realiza de modo similar, recurriendo a vectores base externos expresados en la representación de la matriz interna. Además, los tensores elementales  $\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i$  tienen una matriz de componentes representada directamente como el producto de la matriz  $\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i^T$ . El tensor  $\mathbf{G}$ , formado originalmente a partir de las componentes *NED* en la ecuación (13), tiene una representación interna para la cual la matriz de componentes es

$$[\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} \varphi_{11} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T + \varphi_{12} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1^T + \varphi_{13} \mathbf{e}_2 (-\mathbf{e}_3)^T \\ + \varphi_{21} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2^T + \varphi_{22} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T + \varphi_{23} \mathbf{e}_1 (-\mathbf{e}_3)^T \\ + \varphi_{31} (-\mathbf{e}_3) \mathbf{e}_2^T + \varphi_{32} (-\mathbf{e}_3) \mathbf{e}_1^T + \varphi_{33} (-\mathbf{e}_3) (-\mathbf{e}_3)^T \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Los términos  $\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i^T$  son matrices con un elemento unitario único en la posición *ij*, por ejemplo

$$\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

La evaluación directa de la expresión de la matriz (26) conduce a continuación a la representación interna

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \varphi_{22} & \varphi_{21} & -\varphi_{23} \\ \varphi_{12} & \varphi_{11} & -\varphi_{13} \\ -\varphi_{32} & -\varphi_{31} & \varphi_{33} \end{bmatrix}_{int}. \quad (28)$$

Para recuperar una descripción externa del tensor a partir de la representación interna, tomamos las bi-proyecciones del tensor en las direcciones apropiadas de las componentes, como se describe en la ecuación (6). Así, para encontrar la componente 13 del tensor  $\mathbf{G}$  en el sistema *END*, calculamos  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{D}$ . Los propios productos de puntos son ejecutables como las veces de filas de operaciones de matrices columna, y esto conduce a la expresión de la matriz

$$G_{13} = \mathbf{E}^T \mathbf{G} \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{22} & \varphi_{21} & -\varphi_{23} \\ \varphi_{12} & \varphi_{11} & -\varphi_{13} \\ -\varphi_{32} & -\varphi_{31} & \varphi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \varphi_{23} \quad (29)$$

Donde  $\mathbf{E}, \mathbf{G}, \mathbf{D}$  se expresan en el formato interno de la matriz. El resultado es coherente con la representación de la matriz de las componentes *END* en la ecuación (16).

El manejo de fuentes de datos *NED, END* y *ENU* es un requerimiento práctico común, pero es bastante especial reutilizar los ejes en esos sistemas. Las asignaciones entre fuentes de datos no alineados y el formato interno vienen directamente de lo anterior y se resume en la siguiente sección.

**Fórmulas de matrices para la transformación de las componentes de los vectores y los tensores**

Los datos de vectores y tensores en sistemas de referencia arbitrarios se pueden manejar de forma similar al tratamiento anterior, transformando los vectores base a un formato interno estándar. Esto da lugar a las transformaciones estándar de las componentes mediante métodos matriciales. Permitamos que un sistema de referencia externo arbitrario tenga vectores base unidad ortogonales  $x_1, x_2, x_3$ . Están relacionados con los vectores referencia internos  $e_1, e_2, e_3$  a través de las identidades vectoriales

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1(x_1 \cdot e_1) + x_2(x_2 \cdot e_1) + x_3(x_3 \cdot e_1) \\ e_2 &= x_1(x_1 \cdot e_2) + x_2(x_2 \cdot e_2) + x_3(x_3 \cdot e_2) \\ e_3 &= x_1(x_1 \cdot e_3) + x_2(x_2 \cdot e_3) + x_3(x_3 \cdot e_3) \end{aligned} \tag{30}$$

Los coeficientes forman una matriz 3 x 3  $R$ , donde

$$R = \begin{bmatrix} (x_1 \cdot e_1) & (x_1 \cdot e_2) & (x_1 \cdot e_3) \\ (x_2 \cdot e_1) & (x_2 \cdot e_2) & (x_2 \cdot e_3) \\ (x_3 \cdot e_1) & (x_3 \cdot e_2) & (x_3 \cdot e_3) \end{bmatrix} \tag{31}$$

(ver Figura 4). Esta matriz nos permite expresar la transformación base (30) como

$$[e_1 \ e_2 \ e_3] = [x_1 \ x_2 \ x_3]R \tag{32}$$

La relación inversa utiliza ecuaciones similares a (30), pero con los roles de los símbolos  $e$  y  $x$  invertidos. Esta inversión conduce a la transposición de la matriz  $R$ . Por tanto, la relación inversa es

$$[x_1 \ x_2 \ x_3] = [e_1 \ e_2 \ e_3]R^T \tag{33}$$

Aplicando este cambio de base a la ecuación (3), obtenemos la fórmula de transformación de vectores

$$F = [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = [e_1 \ e_2 \ e_3] \left( R^T \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} \right) \tag{34}$$

La transformación de las componentes del tensor en la ecuación (4) se consigue de un modo similar. En primer lugar, reorganizamos la ecuación (84) en forma bicuadrática sobre los objetos base del vector

$$G = [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{35}$$

Sustituyendo de la ecuación (33) para la expresión de filas previa a la multiplicación, y su transposición para la expres-

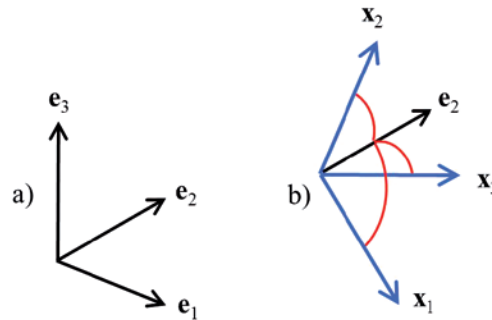


Figura 4 Caso general de dos sistemas de referencia con ejes unitarios no alineados a)  $e_1, e_2, e_3$  y b)  $x_1, x_2, x_3$ . Las componentes de un vector o un tensor en los dos sistemas están relacionados por una matriz de transformación 3 x 3  $R$ , cuyos 9 elementos  $e_i \cdot x_j$  son los cosenos de los ángulos que forma cada eje de un sistema con todos los ejes del otro. Los ángulos que forma el vector  $e_2$  del sistema a) con cada uno de los ejes del sistema b) se muestran en el diagrama.

sión de las columnas posterior a la multiplicación, obtenemos la fórmula de transformación de tensores

$$G = [e_1 \ e_2 \ e_3] \left( R^T \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{bmatrix} R \right) \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \tag{36}$$

La ecuación (34) expresa el mismo vector  $F$  bajo diferentes representaciones base y las ecuaciones (35) y (36) expresan de modo similar el mismo tensor  $G$ . Así, el agrupamiento de operaciones de la matriz entre paréntesis representa las operaciones de la matriz a realizar sobre las matrices de componentes cuando hay un cambio de base.

**Cuestiones de la complejidad aritmética**

Nuestro modelo de proceso trata los vectores y los tensores como objetos de una clase abstracta, con una representación interna que se utiliza para el cálculo, pero cuyos detalles internos no son de interés directo para el usuario. Los métodos de clase permiten la conversión desde cualquier sistema de referencia definido por el usuario al formato interno, y viceversa. Normalmente, la visión externa de un vector es una matriz de tres números para los valores de las componentes, junto con información para identificar el sistema de referencia externo. Para los tensores, la matriz contiene 9 números, pero la compactación de simetría puede reducirlos a una lista de 6 números y reducirla todavía más a 5 si se recurre a una condición de traza cero.

La conversión de componentes de vectores y tensores siempre se puede realizar a través de los cálculos de matrices descritos en la ecuación (34) y las ecuaciones (35) y (36). El coste computacional sería tres productos internos (las veces de filas de operaciones de columna) para la transformación de un vector, y 19 productos internos para la transformación de un tensor, aunque la simetría y las condiciones de traza pueden reducir este conteo a 14 productos internos. Si el

# EM y Métodos Potenciales

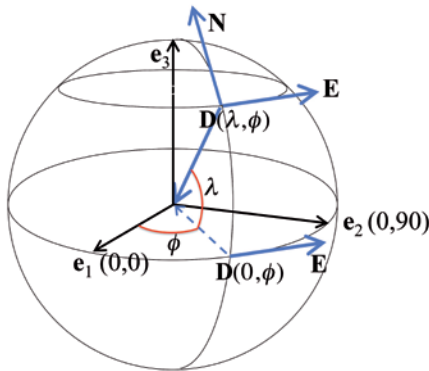


Figura 5 Vectores locales  $N$ ,  $E$ ,  $D$  a latitud  $\phi$  y longitud  $\phi$ , y un sistema de referencias centrado en la tierra. Los vectores unidad  $e_1$ ,  $e_2$  están dirigidos desde el centro hasta puntos de longitud  $\phi = 0$  y  $\phi = 90$  grados en el plano ecuatorial, y  $e_3 = e_1 \times e_2$ . El vector  $E$  es constante a lo largo de cualquier meridiano  $\phi$  y, por tanto, igual a su valor ecuatorial, donde se encuentra por interpolación circular entre  $e_2$  (su valor a  $\phi = 0$ ) y  $-e_2$  (su valor a  $\phi = 90$ ). El valor ecuatorial de  $D$  a la longitud  $\phi$  se puede encontrar de manera similar, mediante la interpolación circular entre  $-e_1$  y  $e_1$ . La interpolación circular entre este valor ecuatorial y el valor polar da a continuación el valor de  $D$  para la latitud  $\phi$ . La tercera dirección se encuentra desde  $N = E \times D$ . Esas operaciones están expresadas en las ecuaciones (38)-(40).

sistema externo es diestro y se cartografía directamente dentro del sistema interno, no hay implicadas operaciones aritméticas. Un sistema zurdo puede requerir únicamente un cambio de signo para vectores y dos para tensores simétricos (comparar los sistemas  $END$  y  $ENU$  en la ecuación (16)) para la conversión de externo a interno. Esto muestra que el método de conversión puede permitir un ajuste para reducir la carga de complejidad computacional.

El formalismo de las ecuaciones (9), (10) y (13)-(15), que expresa la conversión externa-interna de vectores y tensores como sumas a través de expresiones de vectores base (p.ej., a través de las ecuaciones (16) y (17)), puede ser en muy poco óptimo, en particular si los patrones de ceros y unos de las representaciones base internas no se tienen en cuenta. Cuando se aplica a grandes volúmenes de datos, se deben considerar métodos de optimización. En algunos casos, unas pocas transposiciones de componentes y cambios de signo pueden ser suficientes para producir los formatos internos. Sin embargo, en general el coste operativo de la conversión crece sólo linealmente con el tamaño de los datos. La ventaja del formalismo teórico es que es muy intuitivo y está abierto a la verificación.

Considere, por ejemplo, expresar el campo magnético como un vector  $H$  cuando se observa con la intensidad total  $H$  nT a declinación e inclinación grados (ver Blakely, 1995). En términos del marco de referencia NED local, el vector del campo magnético  $H$  se puede escribir como

$$H = H((N \cos \delta + E \sin \delta) \cos \iota + D \sin \iota) . \quad (37)$$

Para manipular dichos datos a través de un rango de localizaciones de latitud y longitud en un marco de referencia

común, puede ser deseable un sistema centrado en la Tierra. Utilizando vectores base unidad diestros internos  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$ , dirigidos desde el centro de la Tierra hasta puntos de la superficie (latitud, longitud) a  $(0,0)$ ,  $(0,90)$ ,  $(90,-)$  grados respectivamente, podemos expresar los vectores base locales como funciones de la longitud  $\phi$  y la latitud  $\lambda$  mediante

$$E = -e_1 \sin \phi + e_2 \cos \phi , \quad (38)$$

$$D = -(e_1 \cos \phi + e_2 \sin \phi) \cos \lambda - e_3 \sin \lambda , \quad (39)$$

$$N = E \times D . \quad (40)$$

(ver Figura 5). El cálculo práctico puede ahora continuar utilizando rutinas estándar de álgebra vectorial, con los vectores internos cartografiados sobre las matrices de componentes como se indica en la ecuación (17). Esto producirá las componentes numéricas del campo magnético en el sistema centrado en la Tierra, sin matrices de transformación explícitas que haya que calcular o a las que haya que recurrir.

## Conclusiones

Las prospecciones geomagnéticas y de gravedad pueden registrar componentes de campos de vectores y tensores en cualquier sistema de referencia preferido por el observador. El procesamiento de dichos datos, p.ej., con propósitos de filtrado, cuadrículado o ajuste del modelo geofísico, requiere un consenso entre los sistemas de referencia de los datos y el sistema de referencia asumido por el software de procesamiento. Por sí misma, la especificación de tuplas cartesianas ordenadas  $(v_x, v_y, v_z)$  para las componentes vectoriales y  $(T_{xx}, T_{xy}, \dots, T_{zz})$  para las componentes de los tensores es insuficiente, ya que el sistema de referencia subyacente  $(x, y, z)$  puede ser diestro o zurdo. La elección correcta es esencial para derivar la semántica de datos adecuada y para un procesamiento correcto.

En respuesta a la cuestión del título, “¿datos potenciales zurdos o diestros?”, afirmamos que ambos ofrecen modos legítimos de representar vectores y tensores. Por tanto, la responsabilidad es del software de procesamiento para proporcionar la flexibilidad necesaria para manejar cualquier tipo de datos de entrada y, si fuera necesario, una mezcla. Hemos sugerido un protocolo que trata los vectores y los tensores como objetos, cuyas clases tienen métodos de conversión entre las representaciones externas y la interna, y viceversa. Los métodos de conversión especifican cómo se tienen que cartografiar los vectores base de referencia externos en un conjunto interno. El conjunto interno se elige conforme a un sistema de referencia diestro. Esto garantiza que el software estándar de vectores y tensores aplicado internamente ofrezca los resultados correctos.

Nuestra formulación de los métodos de conversión es intuitiva. Está indicada en términos de operaciones vectoria-

## EM y Métodos Potenciales

les, en un nivel donde la estructura interna de los vectores base no tiene que ser revelada. El método incita a una verificación a alto nivel, una ventaja sobre la implementación usual con matrices de transformación de componentes. Sin embargo, hemos mostrado que los métodos son compatibles. De hecho, una indicación ingenua de un método de conversión podría optimizar, en algunos casos hacia las componentes o los cambios de signo, o incluso una operación de identidad, o tender hacia matrices de transformación total. Se espera que la conciencia de las cuestiones aquí planteadas contribuya

a mejorar la fiabilidad del software geológico de vectores y tensores para mantener la integridad de los datos potenciales.

**Referencias**

- Blakeley, R.J. [1995] *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications*, Cambridge University Press.
- Pujo, J. [2003] *Elastic Wave Propagation and Generation in Seismology*, Cambridge University Press.
- Weatherburn, C.E. [1960] *Advanced Vector Analysis with Application to Mathematical Physics*. G Bell & Sons Ltd.